# Prvi domaći zadatak iz predmeta Matematika 1

1. Dokazati sledeće skupovne jednakosti:
   a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;
   b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;
   c) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$.

2. Na skupu prirodnih brojeva definisana je relacija
$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) \;\; m\rho n \Leftrightarrow 2 \mid m + n.$$
Dokazati da je $\rho$ relacija ekvivalencije. Odrediti klase ekvivalencije elemenata 1 i 2.

3. Na skupu $A = \left\{1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4\right\}$ definisana je relacija $\rho$ na sledeći način:
$$x\rho y \Leftrightarrow (x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z}) \vee (x \notin \mathbb{Z} \wedge y \notin \mathbb{Z}).$$
Dokazati da je ova relacija relacija ekvivalencije i odrediti klase ekvivalencije.

4. Ispitati da li je relacija $\rho$ definisana na skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ relacija ekvivalencije
$$a\rho b \Leftrightarrow a^2 + 7b = b^2 + 7a.$$
Odrediti sve klase ekvivalencije.

5. Naći oblast definisanosti sledećih funkcija
$$a) \;\; f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-2} + \sqrt{5 - x^2}; \qquad b) \;\; \arcsin\left(\log_{10} \frac{x}{10}\right); \qquad c) \;\; f(x) = \log_{x^2-x-6}(x^2 + x + 6).$$

6. Data je funkcija $f(x) = \ln(x^2 - 1)$.
   (a) Odrediti domen funkcije $f$ i ispitati njenu parnost.
   (b) Ispitati monotonost funkcije $f$ na intervalu $(-\infty, -1)$.
   (c) Ako je domen funkcije $f$ označen sa $A$ i $f : A \to \mathbb{R}$ ispitati koja od svojstava "1-1" i "na" ima funkcija $f$.
   (d) Izabrati domen i kodomen tako da data funkcija bude bijekcija.

7. Dato je pravilo $f(x) = 1 + 2^{-x}$.
   a) Odrediti skupove $A$ i $B$ tako da funkcija $f : A \to B$, $f(x) = 1 + 2^{-x}$ bude bijekcija, i odrediti inverz tako zadate funkcije.
   b) Ispitati monotonost funkcije $f$ (dozvoljeno je korišćenje osobina monotonosti elementarnih funkcija).

8. Šta je algebarska struktura $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, *)$ ako je operacija $*$ definisana na sledeći način
$$a * b = a + b - ab?$$

9. Dokazati da je struktura $(\mathbb{R} \setminus \{-3\}, *)$ Abelova grupa, gde je operacija $*$ definisana na sledeći način:
$$x * y = xy + 3x + 3y + 6$$
za svako $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

10. Dokazati da je skup kompleksnih brojeva $C = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$, gde je $i$ imaginarna jedinica, prsten u odnosu na operacije sabiranja i množenja kompleksnih brojeva.

11. Ako su $A$ i $B$ podgrupe grupe $G$, dokazati da je $A \cap B$ takodje podgrupa grupe $G$.

12. Neka je $(G, \circ)$ grupa i $g \in G$ fiksiran element. Na skupu $G$ definišimo novu operaciju $*$ na sledeći način : $x * y = x \circ g \circ y$. Dokazati da je struktura $(G, \circ)$ grupa.

13. a) Primenom matematičke indukcije dokazati da za $n \in \mathbb{N}$ važi
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}.$$

b) Rešiti sledeću jednačinu u skupu realnih brojeva $|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=x+2$.

14. a) Primenom matematičke indukcije dokazati da za sve prirodne brojeve $n$ važi sledeća nejednakost

$$\frac{3\cdot 7\cdot\ldots\cdot(4n-1)}{5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n+1)}<\sqrt{\frac{3}{4n+3}}.$$

b) Rešiti sledeću jednačinu u skupu realnih brojeva $|x^2+x-1|+|x^2-x-2|=2$.

15. a) Ako je $a_1=5, a_2=7$ i $a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}, n\geq 2$, dokazati da je $a_n=2n+3, n\geq 1$.

b) Dokazati da za svaki $n\in\mathbb{N}$ i $2\leq k\leq n$ važi sledeća jednakost

$$\binom{n+1}{k}+2\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k-2}=\binom{n+1}{k}.$$

16. a) Odrediti $n\in\mathbb{N}$ tako da je $\binom{n+1}{n-2}+2\binom{n-1}{3}=7(n-1)$.

b) Rešiti sledeću nejednačinu u skupu realnih brojeva $\left|\frac{x+4}{3x+2}\right|>\frac{1}{x}$.

17. Naći realan i imaginaran deo kompleksnog broja

$a)$ $(4-3i)(2+i)+(1-2i)^2$; $b)\frac{(1-i)^3(\sqrt{3}-i)}{(1+i\sqrt{3})^2}$; $c)$ $\frac{i}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}$.

18. Rešiti jednačinu

$$\frac{(3+2i)(1+i)+2i}{(2-i)(1+i)-3}=\frac{7-i}{-4}z^3,$$

a zatim dobijena rešenja predstaviti u kompleksnoj ravni.

19. Naći kompleksan broj koji zadovoljava uslov:

$$|z|-\overline{z}=1-\sqrt{3}i,$$

a zatim odrediti $\sqrt[3]{z}$ i rešenja predstaviti u kompleksnoj ravni.

20. Iz uslova $\mathrm{Re}(z^2+1)=1$ i $\mathrm{Im}\left(\frac{z+2}{2-i}\right)=1$ odrediti kompleksan broj $z$. Za tako odredjen kompleksan broj izračunati $\sqrt{z}$ i $z^4$.

21. Na skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ definisana je relacija $\rho$ na sledeći način:

$$a\rho b\Leftrightarrow |a|\leq|b|\wedge\arg(a)\leq\arg(b).$$

Dokazati da je $\rho$ relacija poretka.